基于非同步测量的高分辨率声源定位

韦娟[1]，冯鹏[1]，宁方立[2]
（1.西安电子科技大学通信工程学院，陕西 西安 710071；2.西北工业大学机电学院，陕西 西安 710072）

摘　要：针对非同步测量声源定位方法在低信噪比条件下存在主瓣较宽、易受旁瓣干扰等问题，提出一种子空间逼近算法与截断函数波束成形联合的非同步测量声源定位算法。该算法首先对缺省互谱矩阵进行奇异值分解，通过截断阈值保留主要奇异向量构建低维子空间，继而将缺省互谱矩阵投影到子空间，寻找最优解来补全矩阵。补全后的互谱矩阵通过截断函数波束成形算法实现声源定位。仿真和实验结果表明，与基于核范数最小化及其衍生模型的算法相比，所提算法在低信噪比条件下能够有效减小主瓣宽度、抑制旁瓣数量，矩阵补全误差平均降低了17.6%、声源重构误差平均降低了27%，证明该算法具有良好的鲁棒性和抗噪性。

关键词：非同步测量；声源定位；矩阵补全；子空间逼近
中图分类号：TN912.3
文献标志码：A
DOI：10.11959/j.issn.1000–436x.2025021

High-resolution sound source localization based on non-synchronous measurements

WEI Juan[1], FENG Peng[1], NING Fangli[2]
1. School of Communication Engineering, Xidian University, Xi’an 710071, China
2. School of Mechanical Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi’an 710072, China

Abstract: Concerning the issues of broad main lobes and susceptibility to sidelobe interference in non-synchronous measurements of sound source localization methods under low signal to noise ratio conditions, a non-synchronous measurement sound source localization algorithm based on subspace approximation algorithm and truncated functional beamforming was proposed. Initially, the deficient cross-spectral matrix was performed using singular value decomposition, and the primary singular vectors were retained by a truncation threshold to construct a low-dimensional subspace. Subsequently, the deficient cross-spectral matrix was projected onto this subspace, and the optimal solution for matrix completion was sought. After completion, sound source localization was achieved by using a truncated function beamforming algorithm. Simulation and experimental results demonstrated that, compared with algorithms based on nuclear norm minimization and its derivative models, the proposed algorithm effectively reduces the width of the main lobes and the number of sidelobes under low signal to noise ratio conditions. The matrix completion error is reduced by an average of 17.6%, and the sound source reconstruction error is reduced by an average of 27%, proving the algorithm’s robustness and noise resistance.

Keywords: non-synchronous measurement, sound source localization, matrix completion, subspace approximation

收稿日期：2024–08–08；**修回日期：**2024–11–05
通信作者：宁方立，ningfl@nwpu.edu.cn
基金项目：国家自然科学基金资助项目（No.52475132）；陕西省重点研发计划基金资助项目（No.2024GX-ZDCYL-01-16）；航空科学基金资助项目（No.20200015053001）；2023 西安市重点产业链技术攻关基金资助项目（No.23ZDCYJSGG0006-2023）
Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (No.52475132), The Key Research and Development Program of Shaanxi Province (No.2024GX-ZDCYL-01-16), Aeronautical Science Foundation of China (No.20200015053001), 2023 Xi’an Key Industrial Chain Technology Research Project (No.23ZDCYJSGG0006-2023)

0 引言

近年来，声源定位被广泛应用于各个领域，如设备故障检测[1]、噪声源追踪[2]和机器人避障领域[3]等。声源定位通过多个传声器同时接收声信号并利用时差或相位差来推断声源特征，由于传声器的阵列孔径决定了最低工作频率，阵元密度决定了最高工作频率[4]，因此在使用小孔径、低密度的传声器阵列进行声源定位时，所得结果的空间分辨率较低、抗噪性较差，而增大传声器阵列孔径和阵元密度会增加成本和操作难度[5]。

为了解决上述问题，Antoni 等[6]提出非同步测量方法，即通过移动原型阵列多次测量获取声源信息，并利用贝叶斯概率算法重构声源，获得与大孔径、高密度传声器阵列相近似的测量结果。Pereira 等[7]通过取平均值、最小值等非矩阵补全的算法重构互谱矩阵，计算效率得到提高，但未能很好地抑制旁瓣。Yu 等[8]对非同步测量进行了大量研究，将其重新表述为互谱矩阵补全问题，并先后提出基于核范数最小化（NNM, nuclear norm minimization）的快速迭代收缩阈值法[9]、增广拉格朗日乘子法[10]和交替方向乘子法（ADMM, alternating direction method of multiplier）[11]，利用互谱矩阵的弱稀疏、厄米对称、半正定和声场空间连续性等约束求解互谱矩阵的补全问题得到完整的互谱矩阵。但 NNM 模型对所有奇异值同时最小化，忽略了互异奇异值对矩阵秩的不同影响，导致不能紧致地逼近互谱矩阵的实际秩。为此，Ning 等[12-13]先后提出基于截断核范数正则化（TNNR, truncated nuclear norm regularization）以及基于加权核范数最小化（WNNM, weighted nuclear norm minimization）的非同步测量声源定位算法，其中 TNNR 模型需要确定声源数量，但是在真实工业噪声环境中，声源数目难以估计；WNNM 模型计算复杂度较高、抗噪性较差，导致在低信噪比（SNR, signal to noise ratio）条件下运算时间长、定位精度低。此外，Wei 等[14]提出基于封顶核范数最小化（CNNM, capped nuclear norm minimization）的差分凸函数（DCF, difference convex function）算法，该算法在低信噪比下具有较好的鲁棒性，但所需迭代次数较多、收敛速度较慢。

完整的互谱矩阵可利用波束成形算法计算得到声源位置。常规波束成形（CBF, conventional beamforming）[15]算法通过调整阵列中不同传声器的信号权重，实现对期望方向声源信号的增强，该算法空间分辨率较低。为此，学者们研究了一些高分辨率的波束成形算法[16-22]。

基于上述分析，声源定位算法的核心指标主要包括空间分辨率和抗噪性。空间分辨率是指声源定位系统能够分辨不同方向或位置声源的最小角度或距离，抗噪性则影响系统在复杂噪声环境中的稳定性和可靠性。现有基于核范数模型的算法抗噪不足，而 CBF 算法分辨率较低，这限制了声源定位技术在实际应用中的性能。本文提出一种子空间逼近算法（SAA, subspace approximation algorithm）与截断函数波束成形（TFBF, truncated functional beamforming）联合的非同步测量声源定位算法。SAA 使用阈值截取缺省互谱矩阵奇异值分解后的奇异向量，将缺省互谱矩阵投影到这些向量构成的低维子空间，寻找最优解补全矩阵。与基于核范数的补全算法相比，SAA 通过阈值的减少达到互谱矩阵的降秩，保留互谱矩阵的主要特征，满足低秩性，且抗噪性更强。此外，TFBF 算法在函数波束成形的基础上，利用 SAA 的阈值对互谱矩阵的特征值进行截断，构造新的互谱矩阵函数后进行计算，进一步降低噪声干扰，提高空间分辨率。

1 非同步测量声源定位模型

非同步测量声源定位模型如图 1 所示，原型阵列的传声器数目为 M，分别在 I 个位置（图中四角星）依次移动原型阵列进行测量，记录每次测量的声源信息，移动间距分别为 Δx 和 Δy。将位于 $i\,(i = 1,2,\cdots,I)$ 处的传声器坐标位置记为 $\boldsymbol{r}^i = (\boldsymbol{r}_1^i,\boldsymbol{r}_2^i,\cdots,\boldsymbol{r}_M^i)^{\mathrm{T}}$，$(\cdot)^{\mathrm{T}}$ 表示转置。将平面上 S 个离散的非相干声源产生的稳定声场等距划分为 $N = u \times v$ 个网格，第 $n\,(n = 1,2,\cdots,N)$ 个网格节点的坐标位置记为 $\boldsymbol{r}_n$。声源平面与传声器阵列测量平面相互平行且距离为 h。

将位置 i 处原型阵列测量的频域信号记为 $\boldsymbol{P}_l^i = (p_1^i,p_2^i,\cdots,p_M^i)_l^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^{M\times 1}$，$l\,(l = 1,2,\cdots,L)$ 为采样率。每个网格节点均可能存在声源，因此其频域声压为 $\boldsymbol{q}_l = (q_1,q_2,\cdots,q_N)_l^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^{N\times 1}$，则频率为 f 时，接收信号可表示为

$$\boldsymbol{P}_l^i(f) = \boldsymbol{G}^i\boldsymbol{q}_l(f) + \boldsymbol{n}_l^i(f) \tag{1}$$

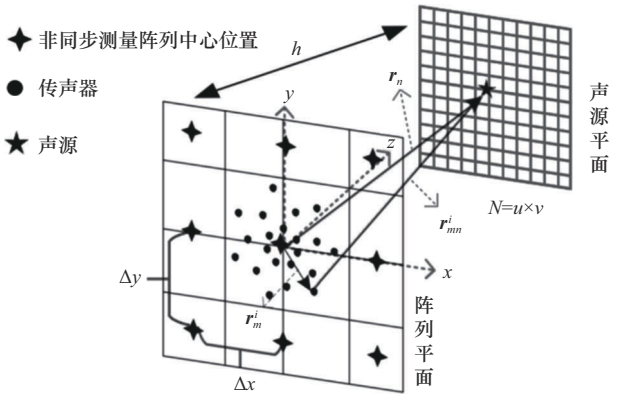


图1　非同步测量声源定位模型

其中，$\boldsymbol{n}_l^i \in \mathbb{C}^{M\times 1}$为噪声信号，$\boldsymbol{G}^i=(\boldsymbol{G}_1^i,\boldsymbol{G}_2^i,\cdots,\boldsymbol{G}_N^i)\in \mathbb{C}^{M\times N}$为导向矢量矩阵，$\boldsymbol{G}_n^i=(g_{1n}^i,g_{2n}^i,\cdots,g_{Mn}^i)^{\mathrm{T}}\in \mathbb{C}^{M\times 1}$，$g_{mn}^i$表示第$n$个节点到第$m$个传声器的衰减函数。根据自由场格林函数，$g_{mn}^i$可表示为

$$g_{mn}^i=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr_{mn}^i}}{4\pi r_{mn}^i} \tag{2}$$

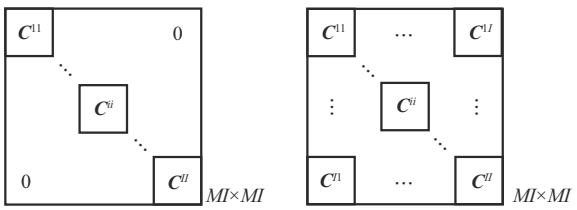
其中，$r_{mn}^i=\|\boldsymbol{r}_m^i-\boldsymbol{r}_n\|_2$表示位置$i$处第$m$个传声器与第$n$个节点的间距；$\|\cdot\|_2$表示2范数；$k=\dfrac{2\pi f}{c}$为波数，$c$为空气中的声速。

根据CBF算法，位置i处第n个节点的波束成形输出为

$$B_n^i=\frac{(\boldsymbol{G}_n^i)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{C}^{ii}\boldsymbol{G}_n^i}{\|\boldsymbol{G}_n^i\|_2^4} \tag{3}$$

其中，$(\cdot)^{\mathrm{H}}$表示矩阵的共轭转置；$\boldsymbol{C}^{ii}=\mathbb{E}\{\boldsymbol{P}_l^i(\boldsymbol{P}_l^i)^{\mathrm{H}}\}\in \mathbb{C}^{M\times M}$为位置$i$处测量得到的互谱矩阵，$\mathbb{E}\{\cdot\}$表示数学期望。

将每次测量得到的互谱矩阵在对角线位置按序排列，可得到缺省互谱矩阵$\boldsymbol{C}^m\in\mathbb{C}^{MI\times MI}$，非对角块位置的数据是未知的，因此需要将$\boldsymbol{C}^m$补全得到完整的联合互谱矩阵$\boldsymbol{C}^S\in\mathbb{C}^{MI\times MI}$，如图2所示。



(a) 缺省互谱矩阵　　(b) 完整的联合互谱矩阵

图2　矩阵补全模型

将完整的联合互谱矩阵代入式(3)，即可得到非同步测量在第n个网格节点的功率输出为

$$B_n^i=\frac{\boldsymbol{G}_n^{\mathrm{H}}\boldsymbol{C}^S\boldsymbol{G}_n}{\|\boldsymbol{G}_n\|_2^4} \tag{4}$$

2　非同步测量声源定位算法

2.1　子空间逼近算法

非同步测量的核心问题为矩阵补全。由于传声器数目一般远远大于声源个数，因此互谱矩阵是低秩的，补全问题可表述为

$$\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{C}^S}\ \mathrm{rank}(\boldsymbol{C}^S)\\&\text{s.t.}\ \ P_\Omega(\boldsymbol{C}^S)=P_\Omega(\boldsymbol{C}^m)\end{aligned} \tag{5}$$

其中，$\mathrm{rank}(\cdot)$表示矩阵的秩；$\Omega\subset\{1,\cdots,MI\}\times\{1,\cdots,MI\}$表示缺省互谱矩阵已知元素的下标集合，$\bar{\Omega}$表示$\Omega$的补集；集合$\Omega$上的正交投影$P_\Omega$满足

$$P_\Omega(\chi)=\begin{cases}\chi,(i,j)\in\Omega\\0\ ,(i,j)\notin\Omega\end{cases} \tag{6}$$

秩最小化属于非凸非光滑问题，难以求解。现有研究多是将秩最小化松弛为核范数相关模型，然后进行优化处理，抗噪性较差。为此，针对式(5)的补全问题，提出一种子空间逼近算法，实现低信噪比条件下的准确定位。

首先，将待补全矩阵$\boldsymbol{C}_k$进行兰乔斯（Lanczos）奇异值分解[23]

$$\left[\boldsymbol{U}_k,\boldsymbol{\Sigma}_k,\boldsymbol{V}_k\right]_{\tau_k}=\mathrm{lansvd}(\boldsymbol{C}_k) \tag{7}$$

其中，$\tau_k\in\mathbb{N}^+$为阈值，$\boldsymbol{\Sigma}_k$表示矩阵$\boldsymbol{C}_k$的前τ_k个奇异值组成的对角矩阵且$\sigma_1^k\geqslant\sigma_2^k\geqslant\cdots\geqslant\sigma_{\tau_k}^k>0$，$\boldsymbol{U}_k$和$\boldsymbol{V}_k$为$\boldsymbol{C}_k$的前$\tau_k$个奇异向量构成的矩阵。可见，Lanczos奇异值分解能够高效地提取低秩稀疏矩阵的特征，从而在低信噪比条件下实现更稳定的矩阵补全，有效提高定位精度和抗噪性。

设互谱矩阵的左奇异向量子空间最优投影矩阵为$\boldsymbol{Z}_k$，误差为R_k，则近似求解模型为

$$\boldsymbol{Z}_k=\boldsymbol{U}_k\boldsymbol{X}_k \tag{8}$$

$$R_k=\left\|\mathrm{vec}(\boldsymbol{C}_k)-\mathrm{vec}(P_\Omega(\boldsymbol{Z}_k))\right\|_{\mathrm{F}} \tag{9}$$

其中，$\mathrm{vec}(\cdot)$表示矩阵的向量形式，$\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$为弗罗贝尼乌斯（Frobenius）范数，最优解$\boldsymbol{X}_k$求解式为

$$\min\left\|\mathrm{vec}(\boldsymbol{C}_k)-\mathrm{vec}(P_\Omega(\boldsymbol{U}_k\boldsymbol{X}_k))\right\|_{\mathrm{F}} \tag{10}$$

采用最小二乘法求解式(10)可得到最优投影矩

阵$\boldsymbol{Z}_k$，将缺省互谱矩阵未知元素用投影矩阵$\boldsymbol{Z}_k$相应位置的元素近似，从而$\boldsymbol{C}_{k+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{C}_k + P_{\bar{\Omega}}(\boldsymbol{Z}_k)$。

对可行矩阵$\boldsymbol{C}_{k+\frac{1}{2}}$进行Lanczos奇异值分解

$$\left[\boldsymbol{U}_{k+\frac{1}{2}},\boldsymbol{\Sigma}_{k+\frac{1}{2}},\boldsymbol{V}_{k+\frac{1}{2}}\right]_{\tau_k} = \mathrm{lansvd}\left(\boldsymbol{C}_{k+\frac{1}{2}}\right) \tag{11}$$

求解式(12)优化问题，得到$\boldsymbol{Z}_{k+\frac{1}{2}}$和误差$R_{k+\frac{1}{2}}$分别为

$$\min\left\|\mathrm{vec}(\boldsymbol{C}_k) - \mathrm{vec}\left(P_{\Omega}\left(\boldsymbol{X}_{k+\frac{1}{2}}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}_{k+\frac{1}{2}}\right)\right)\right\|_{\mathrm{F}} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{Z}_{k+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{X}_{k+\frac{1}{2}}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}_{k+\frac{1}{2}} \tag{13}$$

$$R_{k+\frac{1}{2}} = \left\|\mathrm{vec}(\boldsymbol{C}_k) - \mathrm{vec}\left(P_{\Omega}\left(\boldsymbol{Z}_{k+\frac{1}{2}}\right)\right)\right\|_{\mathrm{F}} \tag{14}$$

从而得到

$$\boldsymbol{C}_{k+1} = \boldsymbol{C}_k + P_{\bar{\Omega}}\left(\boldsymbol{Z}_{k+\frac{1}{2}}\right) \tag{15}$$

根据误差对阈值τ_k进行迭代，若$R_{k+\frac{1}{2}} < \min\{R_1,\cdots,R_k\}$，表明算法在当前迭代中有显著改进，可以减小阈值，进一步提高精度，则$\tau_{k+1} = [c_1\tau_k]$；若$R_{k+\frac{1}{2}} \geqslant c_2R_k$，为避免算法陷入局部最优解，可通过放松约束，增大阈值，让其有更大的搜索空间，则$\tau_{k+1} = \tau_k + 1$；若$\min\{R_1,\cdots,R_k\} \leqslant R_{k+\frac{1}{2}} < c_2R_k$，说明算法处于相对稳定的状态，则保证阈值不变继续迭代，$\tau_{k+1} = \tau_k$。其中，$0 < c_1,c_2 < 1$，$[a]$表示取整。

记$\boldsymbol{C}^*$为式(5)的最优解，若对任意$\varepsilon \geqslant 0$满足

$$\frac{\left\|\boldsymbol{C}_k - \boldsymbol{C}^*\right\|_{\mathrm{F}}}{\left\|\boldsymbol{C}_k\right\|_{\mathrm{F}}} \leqslant \varepsilon \tag{16}$$

则表明算法已收敛。因此，当$\dfrac{\left\|\boldsymbol{C}_{k+1} - \boldsymbol{C}_k\right\|_{\mathrm{F}}}{\left\|\boldsymbol{C}_{k+1}\right\|_{\mathrm{F}}} \leqslant \varepsilon$时，停止迭代。

非同步测量得到的互谱矩阵缺失相位关系，因此引入空间基$\boldsymbol{\psi}$[24]来保证声场的空间连续性，对补全矩阵进行修正，记$\tilde{\boldsymbol{C}}_{k+1}$为修正后的互谱矩阵。

$$\tilde{\boldsymbol{C}}_{k+1} = \boldsymbol{\psi}\boldsymbol{C}_{k+1}\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{H}} \tag{17}$$

SAA以奇异值分解的子空间逼近为基础，经过二次规划得到子空间中最优的可行解补全矩阵。通过减少阈值的奇异值个数达到对子空间的降秩，得到最优低秩矩阵，保留互谱矩阵的主要特征，减少噪声影响，其完整步骤如算法1所示。

算法1　SAA

输入　待补全矩阵$\boldsymbol{C}^m$，迭代终止阈值ε，阈值τ_k，常数c_1和c_2

输出　$\boldsymbol{C}^S = \boldsymbol{C}_{k+1}$

初始化　给定$\boldsymbol{C}^m$已知元素的下标集合Ω并求其补集$\bar{\Omega}$；$k = 0$且初始矩阵$\boldsymbol{C}_0 = P_{\Omega}(\boldsymbol{C}^m)$

1) for $k = 1$

2) 用式(7)计算$\boldsymbol{U}_k$、$\boldsymbol{\Sigma}_k$、$\boldsymbol{V}_k$

用式(10)计算最优解$\boldsymbol{X}_k$

用式(8)和式(9)计算矩阵$\boldsymbol{Z}_k$与误差R_k

根据$\boldsymbol{C}_{k+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{C}_k + P_{\bar{\Omega}}(\boldsymbol{Z}_k)$更新缺省互谱矩阵

3) 用式(11)计算$\boldsymbol{U}_{k+\frac{1}{2}}$、$\boldsymbol{\Sigma}_{k+\frac{1}{2}}$、$\boldsymbol{V}_{k+\frac{1}{2}}$

用式(12)计算最优解$\boldsymbol{X}_{k+\frac{1}{2}}$

用式(13)和式(14)计算矩阵$\boldsymbol{Z}_{k+\frac{1}{2}}$与误差$R_{k+\frac{1}{2}}$

用式(15)计算$\boldsymbol{C}_{k+1}$

4) if

$$R_{k+\frac{1}{2}} < \min\{R_1,\cdots,R_k\}$$

$$\tau_{k+1} = [c_1\tau_k]$$

else if　$R_{k+\frac{1}{2}} \geqslant c_2R_k$

$$\tau_{k+1} = \tau_k + 1$$

else

$$\tau_{k+1} = \tau_k$$

end if

5)用式(17)对$\boldsymbol{C}_{k+1}$进行修正，令$\boldsymbol{C}_{k+1} = \tilde{\boldsymbol{C}}_{k+1}$

6) if $\dfrac{\left\|\boldsymbol{C}_{k+1} - \boldsymbol{C}_k\right\|_{\mathrm{F}}}{\left\|\boldsymbol{C}_{k+1}\right\|_{\mathrm{F}}} \leqslant \varepsilon$,break

else $k = k + 1$，转步骤2

end if

7)end for

2.2　算法复杂度分析

算法复杂度是衡量算法性能的重要指标。将基于截断核范数正则化的交替方向乘子法记为TNNR-ADMM[12]；基于加权核范数最小化的交替

方向乘子法记为WNNM-ADMM[13]；基于封顶核范数最小化的差分凸函数法记为CNNM-DC[14]。上述3种算法和SAA在补全$m \times m$的矩阵时，在单次迭代过程中，其中TNNR-ADMM、WNNM-ADMM和CNNM-DC的时间复杂度为$O(m^3)$，空间复杂度为$O(m^2)$；SAA的运算量主要包括Lanczos奇异值分解和矩阵乘法，Lanczos奇异值分解的时间复杂度为$O(m^3)$，矩阵乘法的时间复杂度为$O(m^2)$，则总体时间复杂度为$O(m^3)$，空间复杂度为$O(m^2)$。因此，SAA的复杂度较其余算法并没有显著差异。

2.3　截断函数波束成形

传统波束成形的声源定位结果旁瓣高且覆盖面大导致定位结果并非理想，而函数波束成形[20]能够降低旁瓣，获得更加清晰的定位结果。

对完整的联合互谱矩阵进行特征值分解

$$\boldsymbol{C}^S = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}} \tag{18}$$

其中，$\boldsymbol{\Lambda}$为$\boldsymbol{C}^S$的特征值组成的对角矩阵，$\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{MI}),\varphi_1 \geqslant \varphi_2 \geqslant \cdots \geqslant \varphi_{MI}$；$\boldsymbol{Q}$是$\boldsymbol{C}^S$的特征矢量构成的酉矩阵，$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{E}$，第$i$个特征值对应的特征矢量为$\boldsymbol{\mu}_i$。

构造互谱矩阵函数

$$f(\boldsymbol{C}^S) = \boldsymbol{Q}f(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{Q}\mathrm{diag}\left(f(\varphi_1),\cdots,f(\varphi_{MI})\right)\boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}} \tag{19}$$

令$f = t^{\frac{1}{v}}$，v为阶数，则有

$$\left(\boldsymbol{C}^S\right)^{\frac{1}{v}} = \boldsymbol{Q}\mathrm{diag}\left(\varphi_1^{\frac{1}{v}},\cdots,\varphi_1^{\frac{1}{v}}\right)\boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}} = \sum_{i=1}^{MI}\varphi_i^{\frac{1}{v}}\boldsymbol{\mu}_i\boldsymbol{\mu}_i^{\mathrm{H}} \tag{20}$$

在理想情况下，当声源为S个非相干声源时，互谱矩阵特征值分解后非零特征值的个数应该等于声源个数。由于噪声干扰，补全后的互谱矩阵的非零特征值大于声源个数，当通过式(20)的互谱矩阵计算功率输出会导致旁瓣输出增大，影响定位效果。通过SAA补全互谱矩阵，其中阈值τ_k在补全过程中不断逼近互谱矩阵的真实秩，因此，使用阈值τ_k截取矩阵的前τ_k个特征值及特征向量计算功率输出

$$\left(B_T\right)_n^i = \frac{\left(\boldsymbol{G}_n^{\mathrm{H}}\left(\sum_{i=1}^{\tau_k}\varphi_i^{\frac{1}{v}}\boldsymbol{\mu}_i\boldsymbol{\mu}_i^{\mathrm{H}}\right)\boldsymbol{G}_n\right)^v}{\|\boldsymbol{G}_n\|_2^4} \tag{21}$$

将采用阈值τ_k截取的函数波束成形称为截断函数波束成形，该方法能够减少主瓣宽度，抑制旁瓣，提高阵列空间分辨率、定位精度和计算效率。

3　仿真分析

在仿真实验中，原型阵列为包含21阵元的螺旋线阵列，如图1所示。声源平面为1 m × 1 m，等距划分为100 × 100的网格，平面内设置2个声压相等的非相干声源，位置分别为(−0.3,0,1) m和(0.3,0,1) m。原型阵列与声源平面在z轴方向上的测量距离为1 m。将原型阵列在9个不同位置进行测量，正对声源平面测量位置的中心坐标为(0,0,0) m，相邻测量位置移动间距$\Delta x = \Delta y = 0.05$ m。经过多次实验及交叉验证，仿真中，取$c_1 = 0.8$，$c_2 = 0.9$，$\tau_1 = 10$，$\varepsilon = 10^{-3}$，最大迭代次数设置为15。根据文献[20]及实验分析，阶数$v = 5$。

3.1　不同算法的矩阵补全误差比较

矩阵补全误差（MCE, matrix completion error）是衡量矩阵补全质量的重要指标，用于量化在矩阵补全过程中，完整矩阵与补全后的近似矩阵之间的差异。常用Frobenius范数来衡量，其定义为

$$\mathrm{MCE} = \frac{\|\boldsymbol{C}^S - \boldsymbol{C}^r\|_{\mathrm{F}}}{\|\boldsymbol{C}^r\|_{\mathrm{F}}} \times 100\% \tag{22}$$

其中，$\boldsymbol{C}^r$为传声器阵列同步测量得到的互谱矩阵。

在实际的复杂工业环境中，存在较强的背景噪声，为了验证算法的鲁棒性和抗干扰能力，选择在低信噪比条件下进行算法测试。设置信噪比范围为−15 ~−5 dB，变化步长为1 dB，在每个SNR处测试50次，平均得到矩阵补全误差。其中，根据文献[12]，TNNR-ADMM最大迭代次数为30，$\varepsilon_{\mathrm{TNNR}} = 0.005$，$\mu_{\mathrm{TNNR}} = \frac{24.5}{MI}$；根据文献[13]，WNNM-ADMM最大迭代次数为20，$\varepsilon_{\mathrm{WNNM}} = 0.001$；根据文献[14]，CNNM-DC的最大迭代次数为30，$\varepsilon_{\mathrm{CNNM}} = 0.005$。上述3种算法与SAA的MCE如图3所示。

由图3可知，当声源频率从3 000 Hz提高到5 000 Hz，4种算法的MCE变化不大。随着信噪比的降低，TNNR-ADMM、WNNM-ADMM和SAA的MCE逐渐增大，而CNNM-DC限制了主要奇异值的上限，避免奇异值的过度收缩，使得在补全过程中，MCE基本不变，约为93.9%。当声源频率为3 000 Hz、信噪比为−5 dB时，SAA的MCE约为45%，低于TNNR-ADMM的50%和WNNM-ADMM的61%；当信噪比为−10 dB时，SAA的MCE约为91%，TNNR-ADMM和WNNM-ADMM的MCE分别为110%和124%；当信噪比降低为

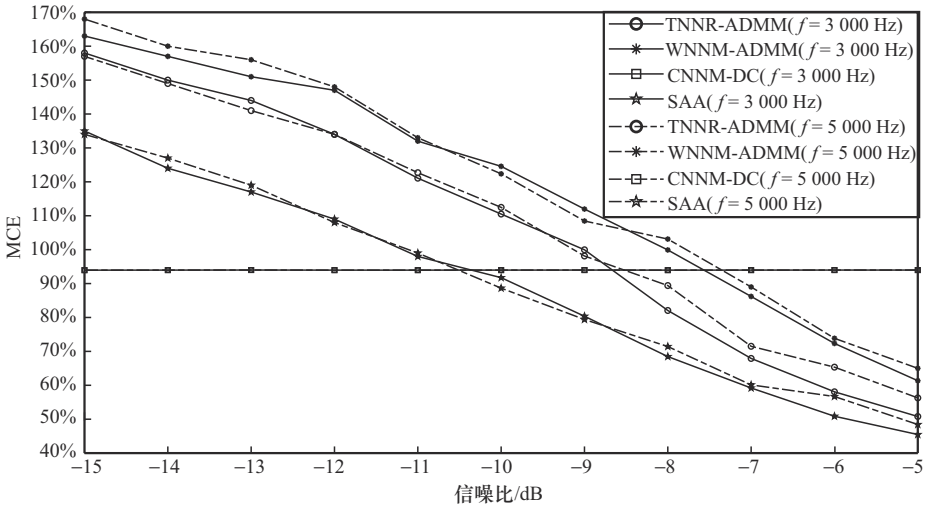


图3　4种算法的MCE

−15 dB 时，TNNR-ADMM 和 WNNM-ADMM 的 MCE 分别为 158% 和 163%，SAA 的 MCE 约为 135%。当声源频率为5 000 Hz时，TNNR-ADMM 在不同SNR下的平均MCE约为108.8%；WNNM-ADMM的平均MCE约为120.62%；CNNM-DC的平均MCE约为93.9%；SAA的平均MCE约为90.1%，低于其余算法。据此可知，在低信噪比下，SAA的矩阵补全效果优于TNNR-ADMM、WNNM-ADMM和CNNM-DC这3种算法，矩阵补全误差平均降低了约17.6%。此外，互谱矩阵表征信息的稳定性比补全误差更重要，仅凭MCE判断不够深入，需结合定位结果综合评估。

3.2　不同算法的声源定位结果比较

将基于子空间逼近的截断函数波束成形算法记为SAA-TFBF，在不同条件下对TNNR-ADMM、WNNM-ADMM、CNNM-DC和SAA-TFBF进行仿真，对比定位结果验证SAA-TFBF的性能。声源重构误差（SRE, sound source reconstruction error）可以衡量声场恢复的精度，定义为

$$\mathrm{SRE} = \frac{\left\| \boldsymbol{B}^{C} - \boldsymbol{B}^{r} \right\|_{\mathrm{F}}}{\left\| \boldsymbol{B}^{r} \right\|_{\mathrm{F}}} \times 100\% \tag{23}$$

其中，$\boldsymbol{B}^{C}$为完整的联合互谱矩阵得到的声场功率重构结果，$\boldsymbol{B}^{r}$为传声器阵列进行同步测量得到的声场功率重构结果。

如图4所示，当信噪比为−5 dB、声源频率为3 000 Hz时，TNNR-ADMM和WNNM-ADMM得到的定位结果未能将2个主瓣分离，旁瓣声压级较高，对声源的判断影响较大，而且WNNM-ADMM的定位结果比TNNR-ADMM的定位结果更差，说明WNNM-ADMM在低信噪比情况下权重会受到噪声干扰；CNNM-DC和SAA-TFBF的定位结果能够区分声源平面内的2个声源，但SAA-TFBF主瓣宽度更小，定位精度较高。其中，TNNR-ADMM的SRE为40.45%，WNNM- ADMM的SRE为56.52%，CNNM-DC的SRE为21.68%，SAA-TFBF的SRE为8.75%。

如图5所示，当信噪比为−10 dB、声源频率为3 000 Hz时，TNNR-ADMM、WNNM-ADMM和CNNM-DC的定位结果2个主瓣混叠严重，旁瓣较多，对声源位置的判断影响很大，且TNNR-ADMM和WNNM-ADMM旁瓣的声压级几乎与声源位置处相等；SAA-TFBF的定位结果依然可以清晰区分声源平面内的2个声源，有效抑制旁瓣。其中，TNNR-ADMM的SRE为58.96%，WNNM-ADMM的SRE为67.32%，CNNM-DC的SRE为25.76%，SAA-TFBF的SRE为15.76%。

如图6所示，当信噪比为−15 dB、声源频率为3 000 Hz时，随着信噪比的进一步降低，TNNR-ADMM、WNNM-ADMM和CNNM-DC的定位结果旁瓣干扰严重，无法判断声源位置，抗噪性差；SAA-TFBF的定位结果虽出现少量旁瓣，但声压级较低，对声源位置的判断影响较小。其中，TNNR-ADMM的SRE为63.36%，WNNM-ADMM的SRE为70.78%，CNNM-DC的SRE为45.23%，SAA-TFBF的SRE为31.16%。

如图7所示，当信噪比为−5 dB、声源频率为

5 000 Hz时，随着频率的提高，主瓣变窄。在低信噪比条件下，TNNR-ADMM和WNNM-ADMM的定位结果旁瓣干扰严重，无法准确判断声源位置；CNNM-DC和SAA-TFBF的仿真结果能够区分声源平面内的2个声源，但SAA-TFBF的旁瓣更低，效果更好。其中，TNNR-ADMM的SRE为31.29%，

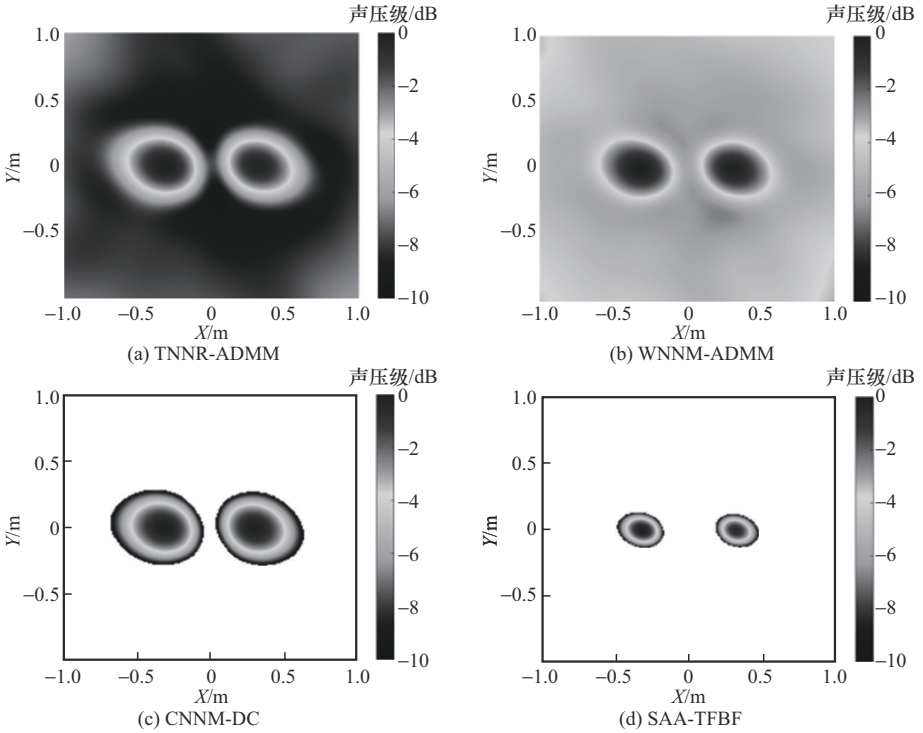


图4　SNR=−5 dB、f=3 000 Hz时4种算法的仿真定位结果

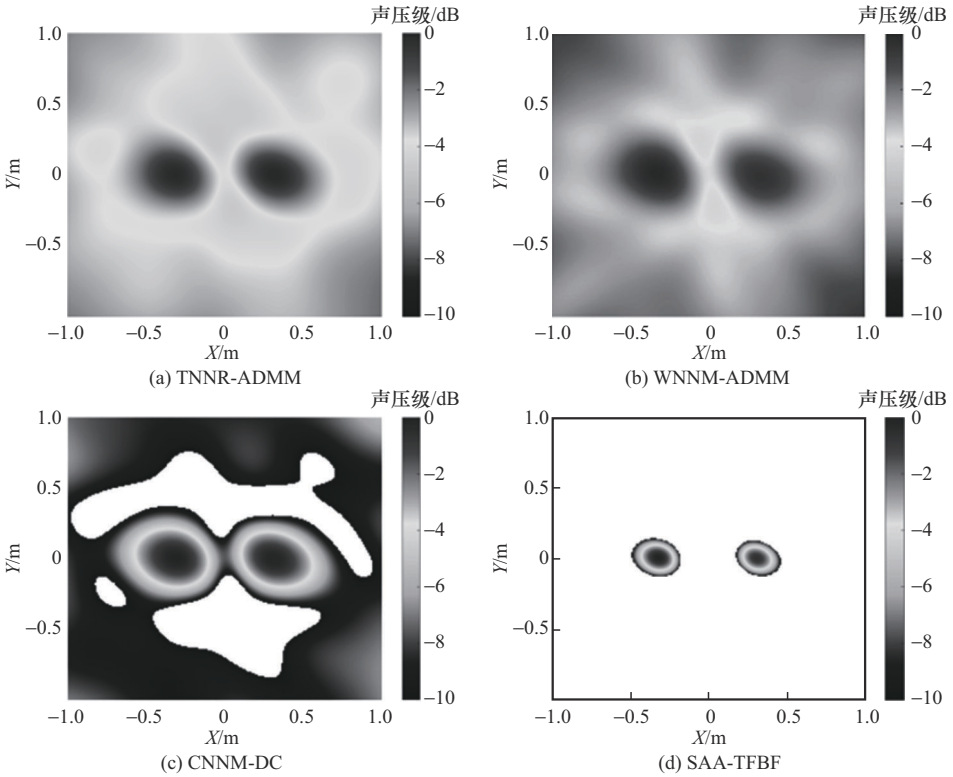


图5　SNR=−10 dB、f=3000 Hz时4种算法的仿真定位结果

WNNM-ADMM 的 SRE 为 43.81%，CNNM-DC 的 SRE 为 10.53%，SAA-TFBF 的 SRE 为 4.76%。

如图 8 所示，当信噪比为−10 dB、声源频率为 5 000 Hz 时，TNNR-ADMM、WNNM-ADMM 和 CNNM-DC 的定位结果中存在大量旁瓣，且声压级较高，对声源位置的判断影响较大；SAA-TFBF 的定位结果依然可以清晰区分声源平面内的 2 个声源，抑制旁瓣。其中，TNNR-ADMM 的 SRE 为 45.64%，

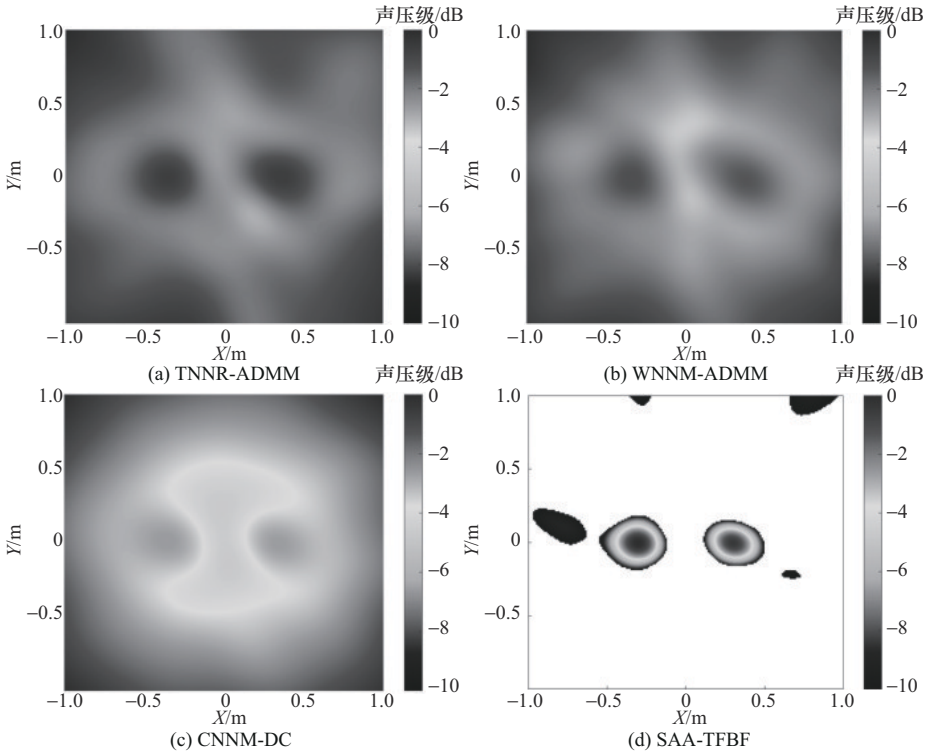


图 6　SNR=−15 dB、f=3 000 Hz 时 4 种算法的仿真定位结果

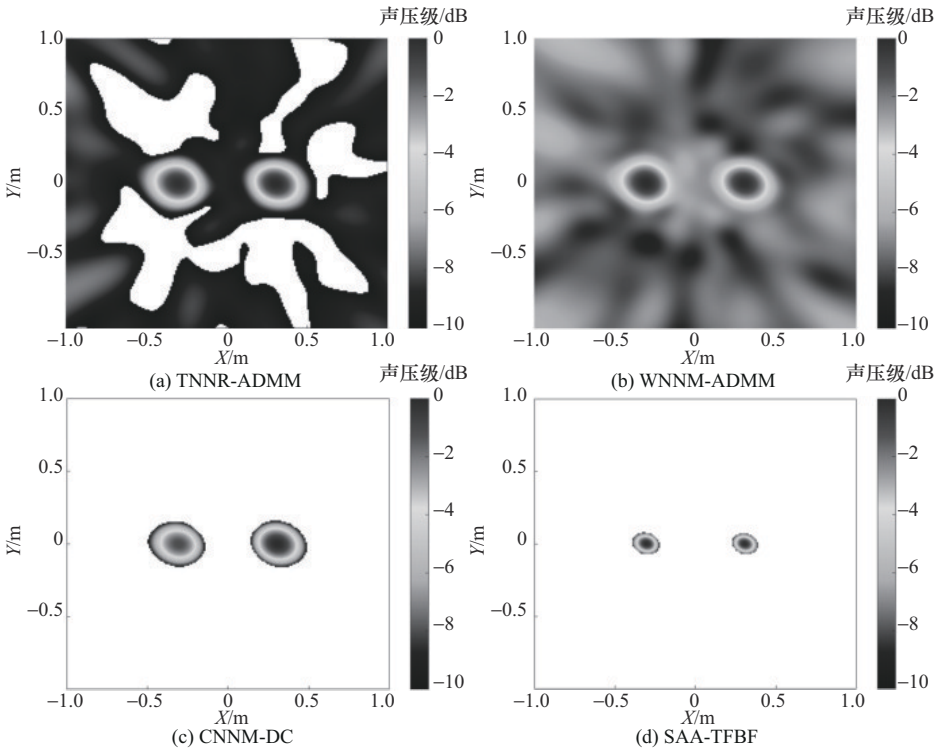


图 7　SNR=−5 dB、f=5 000 Hz 时 4 种算法的仿真定位结果

WNNM-ADMM 的 SRE 为 50.47%，CNNM-DC 的 SRE为20.13%，SAA-TFBF的SRE为16.70%。

如图9所示，当信噪比为−15 dB、声源频率为 5 000 Hz时，随着信噪比的进一步降低，TNNR-

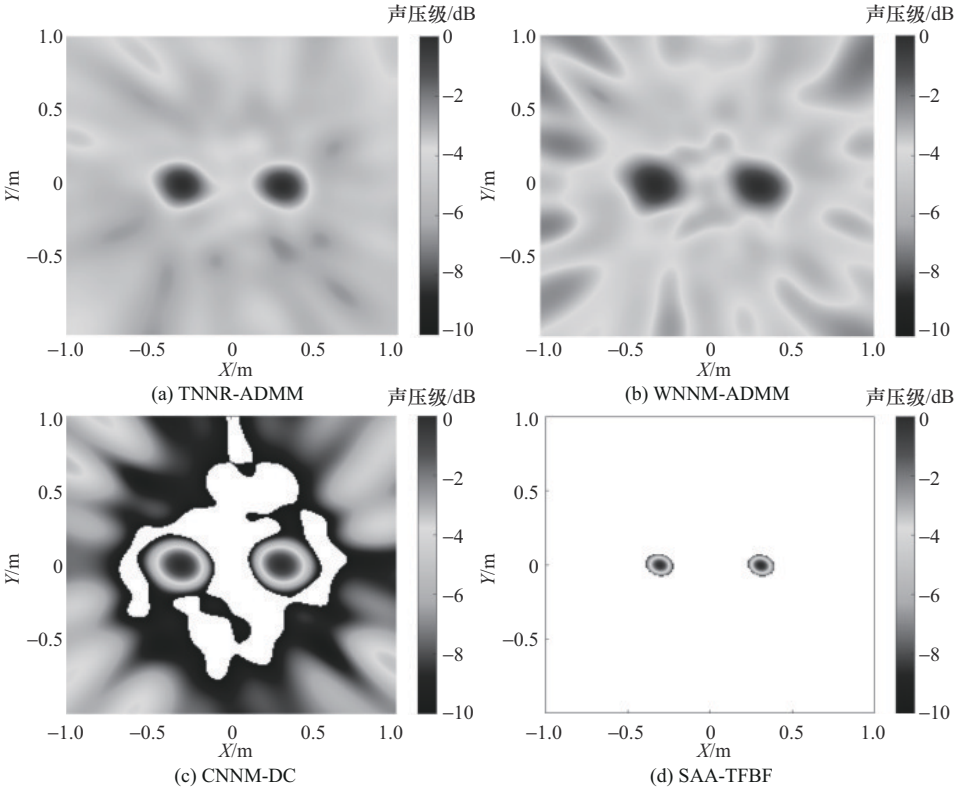


图8　SNR=−10 dB、f=5 000 Hz时4种算法的仿真定位结果

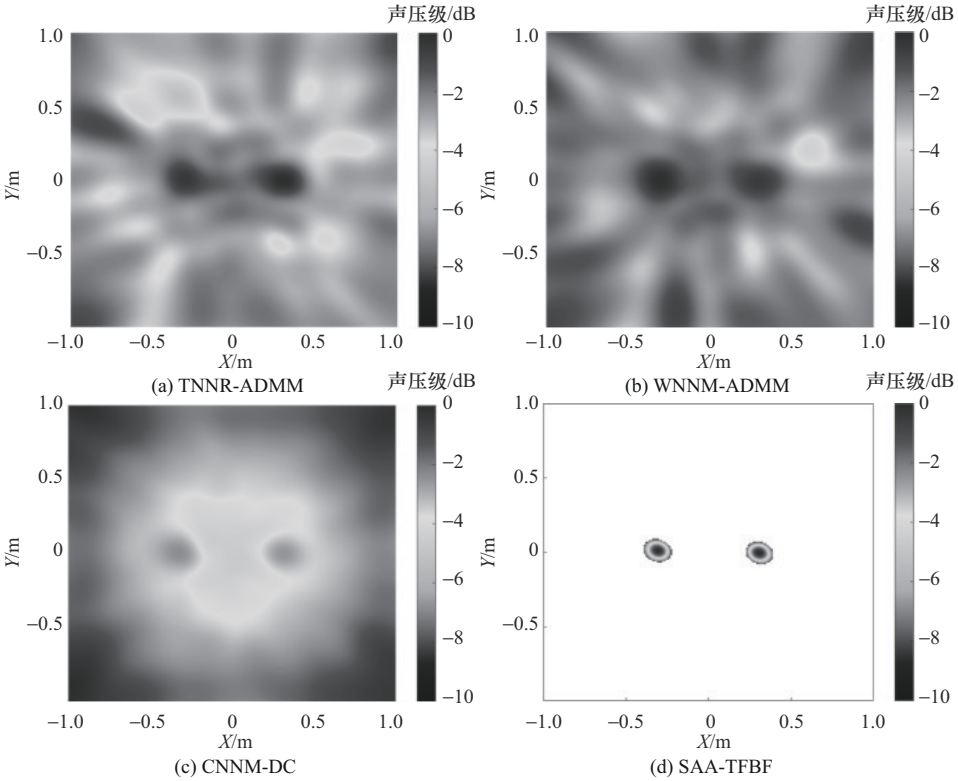


图9　SNR=−15 dB、f=5 000 Hz时4种算法的仿真定位结果

ADMM、WNNM-ADMM 和 CNNM-DC 的定位结果旁瓣干扰严重，无法判断声源位置，抗噪性较差；SAA-TFBF 的定位结果仍然可以清晰区分 2 个声源，证明了 SAA-TFBF 具有更好的鲁棒性和抗噪性。其中，TNNR-ADMM 的 SRE 为 52.64%，WNNM-ADMM 的 SRE 为 57.32%，CNNM-DC 的 SRE 为 43.30%，SAA-TFBF 的 SRE 为 29.13%。

针对上述 4 种算法，给出了在信噪比为−5 dB、−10 dB 和−15 dB，声源频率为 3 000 Hz 和 5 000 Hz 条件下的 3 dB 波束宽度折线图进行定量分析，在每个 SNR 处测试 50 次，平均得到波束宽度，如图 10 所示。

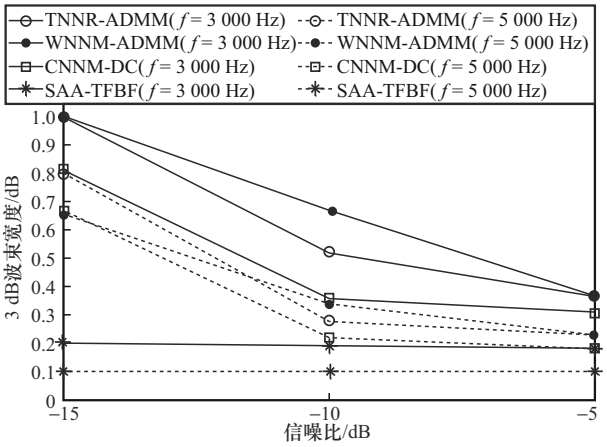


图 10　不同信噪比下 4 种算法的波束宽度

当信噪比不变，随着声源频率的增大，4 种算法的波束宽度减小。当声源频率不变，随着信噪比的增加，TNNR-ADMM、WNNM-ADMM 和 CNNM-DC 的波束宽度逐渐增大，受噪声干扰严重，抗噪性差，而 SAA-TFBF 的波束宽度基本不变。这是由于 SAA-TFBF 中，SAA 在预处理阶段降低了噪声影响，使得 TFBF 能够更好地发挥其优势，同时 TFBF 进一步增强了信号的方向性和强度，抑制了噪声影响，因此 SAA-TFBF 具有更好的抗噪性，从而在低信噪比下保持较高的分辨率和旁瓣抑制能力。

4　实验验证

为了验证 SAA-TFBF 在实际应用中的性能，搭建实验平台进行验证，如图 11 所示。实验在 8 m×12 m ×5 m 的实验室进行。实验中使用的原型阵列为孔径 0.3 m×0.3 m 的 16 通道平面随机阵列，阵列中心安装摄像头，采集的图像信息用于后续数据融合验证。2 个蓝牙音箱距离为 0.6 m，播放不相干白噪声。传声器阵列与 2 个蓝牙音箱相距 1 m，传声器阵列与蓝牙音箱处于同一高度，距地面为 1.5 m。第 3 个蓝牙音箱放在阵列后面播放白噪声作为背景噪声。移动原型阵列在不同位置进行 9 次测量，9 次测量的中心位置坐标与仿真相同，采样频率为 44.1 kHz。

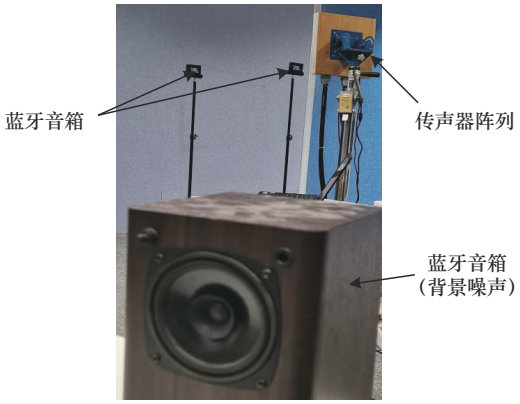


图 11　实验平台

不同频率下的信噪比如图 12 所示。当频率为 3 230 Hz 时，信噪比为−7.3 dB；当频率为 3 273 Hz 时，信噪比为−4.2 dB；当频率为 4 479 Hz 时，信噪比为−3.9 dB。

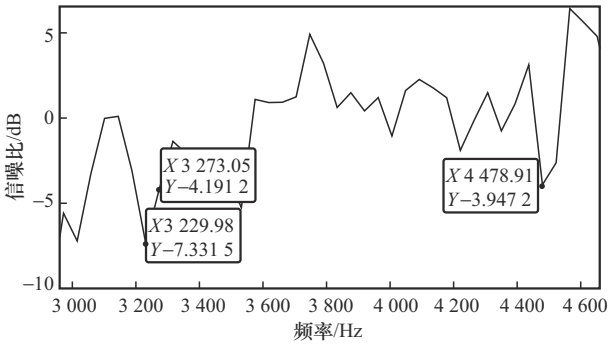


图 12　不同频率下的信噪比

如图 13 所示，当信噪比为−3.9 dB、频率为 4 479 Hz 时，TNNR-ADMM 和 WNNM-ADMM 的定位结果中未能将 2 个主瓣完全分离，旁瓣声压级较高，对声源位置的判断影响较大；CNNM-DC 的定位结果能够将 2 个主瓣完全分离，但是出现了少量旁瓣；SAA-TFBF 的定位结果中完全分离 2 个主瓣并有效抑制了旁瓣，并且主瓣宽度缩小，能够对声源位置准确判断。

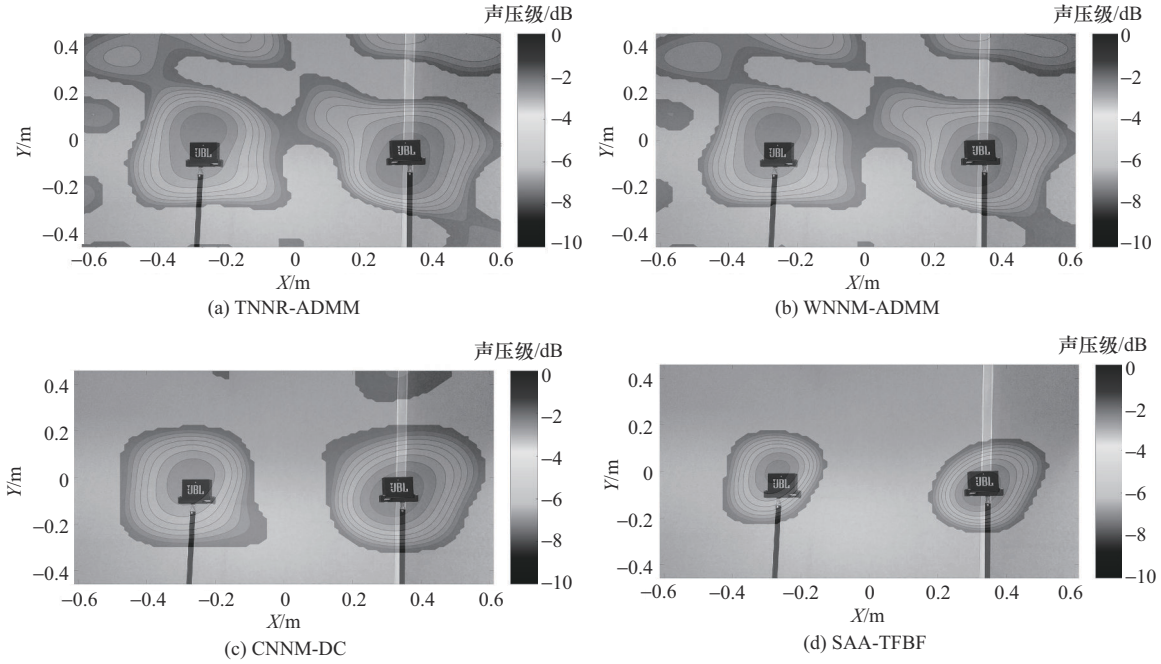


图13　SNR=−3.9 dB、f=4 479 Hz时4种算法的定位结果

如图14所示，当信噪比为−4.2 dB、频率为3 273 Hz时，TNNR-ADMM和WNNM-ADMM的定位结果中主瓣高度融合，旁瓣几乎覆盖了整个声源平面；CNNM-DC的定位结果中2个主瓣少许混叠，未能抑制旁瓣，影响对声源位置的判断；SAA-TFBF的定位结果能够完全分离2个主瓣，并有效抑制旁瓣。

如图15所示，当信噪比为−7.3 dB、频率为3 230 Hz时，TNNR-ADMM和WNNM-ADMM无法准确区分2个声源位置；CNNM-DC的主瓣宽度较大，主瓣边缘距离较近，旁瓣影响较大；SAA-TFBF的定位结果主瓣宽度较小，主瓣边缘距离较远，有效抑制了旁瓣，具有较高的分辨率和良好的抗噪性。

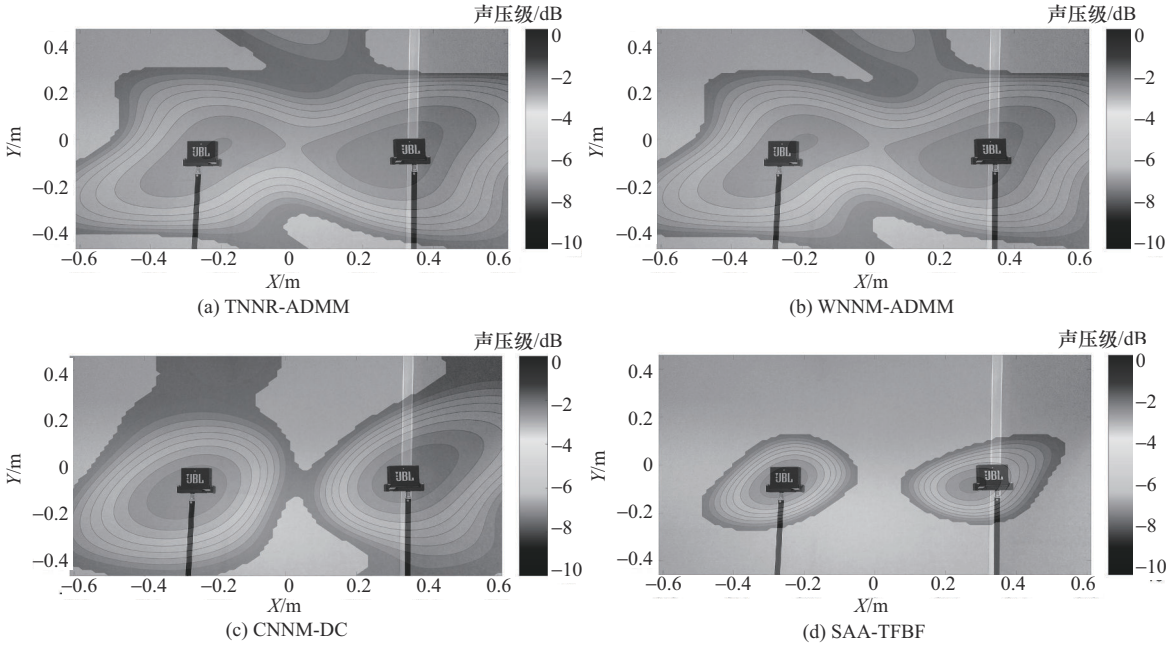
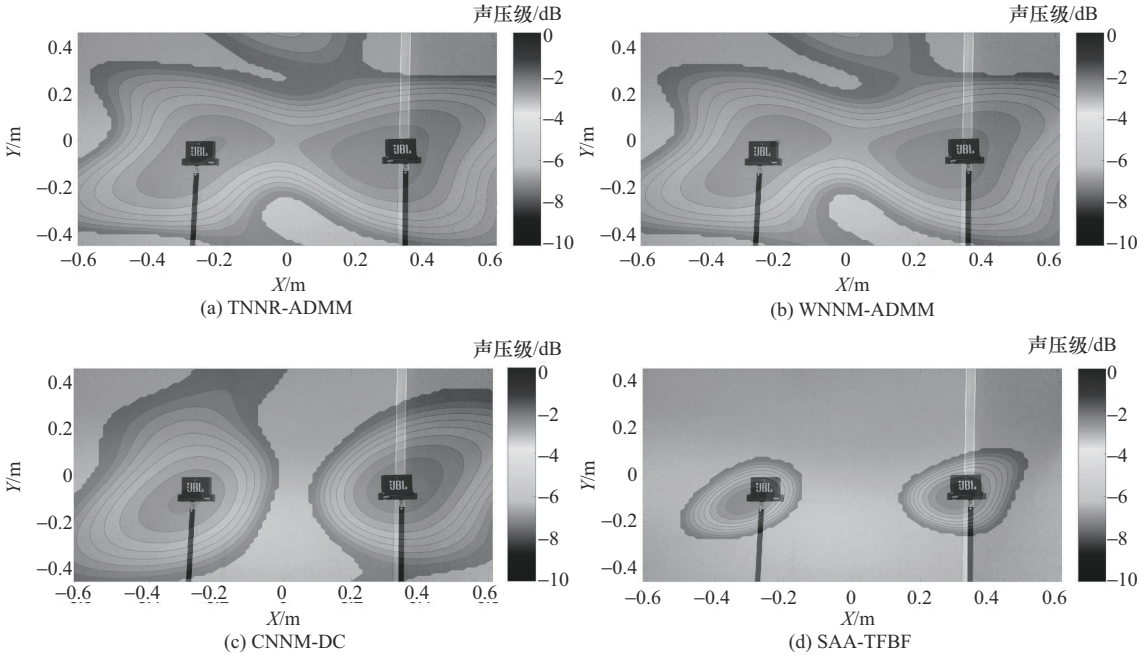


图14　SNR=−4.2 dB、f=3 273 Hz时4种算法的定位结果



(a) TNNR-ADMM　(b) WNNM-ADMM　(c) CNNM-DC　(d) SAA-TFBF

图15　SNR=−7.3 dB、f=3 230 Hz时4种算法的定位结果

5　结束语

针对低信噪比条件下，非同步测量声源定位存在主瓣较宽、受旁瓣干扰导致定位精度低的问题，本文提出了一种SAA与TFBF联合的非同步测量声源定位算法，并在不同频率及信噪比条件下与TNNR-ADMM、WNNM-ADMM和CNNM-DC进行了仿真和实验对比。结果表明，在信噪比为−15 dB及以上的情况下，所提算法的MCE较其他算法平均降低了约17.6%，SRE平均降低了约27%，波束宽度较窄，体现了该算法的鲁棒性和抗噪性。另外，该算法还能够减小主瓣宽度、抑制旁瓣数量，有效实现了低信噪比条件下的高分辨率声源定位，适用于强背景噪声干扰的工业环境中。

参考文献：

[1] QUY T B, KIM J M. Crack detection and localization in a fluid pipeline based on acoustic emission signals[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2021, 150: 107254.

[2] ZHUO D B, CAO H. Fast sound source localization based on SRP-PHAT using density peaks clustering[J]. Applied Sciences, 2021, 11 (1): 445.

[3] WANG W D, ZHANG Q F, TAN W J, et al. Direction finding via acoustic vector sensor array with non-orthogonal factors[J]. Digital Signal Processing, 2021, 108: 102910.

[4] CHU N, NING Y, YU L, et al. A fast and robust localization method for low-frequency acoustic source: variational Bayesian inference based on nonsynchronous array measurements[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2020, 70: 2504718.

[5] 韦娟, 贺雨涛, 宁方立. 基于互质位置非同步测量的低频声源成像方法[J]. 通信学报, 2023, 44(9): 93-103.
WEI J, HE Y T, NING F L. Low frequency acoustic source imaging method based on coprime position non-synchronous measurement[J]. Journal on Communications, 2023, 44(9): 93-103.

[6] ANTONI J, LIANG Y, LECLÈRE Q. Reconstruction of sound quadratic properties from non-synchronous measurements with insufficient or without references: Proof of concept[J]. Journal of Sound and Vibration, 2015, 349: 123-149.

[7] PEREIRA L T L, MERINO-MARTÍNEZ R, RAGNI D, et al. Combining asynchronous microphone array measurements for enhanced acoustic imaging and volumetric source mapping[J]. Applied Acoustics, 2021, 182: 108247.

[8] YU L, ANTONI J, LECLERE Q. Spectral matrix completion by cyclic projection and application to sound source reconstruction from non-synchronous measurements[J]. Journal of Sound and Vibration, 2016, 372: 31-49.

[9] YU L, ANTONI J, LECLERE Q, et al. Acoustical source reconstruction from non-synchronous sequential measurements by fast iterative shrinkage thresholding algorithm[J]. Journal of Sound and Vibration, 2017, 408: 351-367.

[10] YU L, ANTONI J, WU H J, et al. Fast iteration algorithms for implementing the acoustic beamforming of non-synchronous measurements[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 134: 106309.

[11] YU L, ANTONI J, ZHAO H, et al. The acoustic inverse problem in the framework of alternating direction method of multipliers[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2021, 149: 107220.

[12] NING F L, HU J L, HOU H J, et al. Sound source localization of non-synchronous measurements beamforming based on the truncated nuclear norm regularization[J]. Applied Acoustics, 2022, 191: 108688.

[13] 宁方立, 邓宗玲, 姚克强, 等. 基于加权核范数最小化的非同步测量声源定位[J]. 机械工程学报, 2024, 60(3): 120-130.
NING F L, DENG Z L, YAO K Q, et al. Non-synchronous measurements of sound source localization based on weighted nuclear norm minimization[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2024, 60(3): 120-130.

[14] WEI J, HE Y T, NING W C. Non-synchronous measurements acoustic imaging method based on capped nuclear norm minimization[J]. Journal of Theoretical and Computational Acoustics, 2024, 32(1): 2340008.

[15] CHIARIOTTI P, MARTARELLI M, CASTELLINI P. Acoustic beamforming for noise source localization – Reviews, methodology and applications[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 120: 422-448.

[16] XIAO Y Q, FAN Z B, CHEN J L, et al. High-resolution acoustic beamforming based on genetic algorithms[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2023, 204: 110840.

[17] DEN OUDEN O F C, ASSINK J D, SMETS P S M, et al. CLEAN beamforming for the enhanced detection of multiple infrasonic sources[J]. Geophysical Journal International, 2019, 221(1): 305-317.

[18] COUSSON R, LECLÈRE Q, PALLAS M A, et al. A time domain CLEAN approach for the identification of acoustic moving sources[J]. Journal of Sound and Vibration, 2019, 443: 47-62.

[19] BAI B H, LI X D. Acoustic sources mapping based on the non-negative L 1/2 regularization[J]. Applied Acoustics, 2020, 169: 107456.

[20] DOUGHERTY R P. Functional beamforming[C]//Proceedings on CD of the 5th Berlin Beamforming Conference. Palo Alto: AAAI Press, 2014: 19-20.

[21] DOUGHERTY R P. Enhancing deconvolution with functional beamforming[C]//Proceedings of the 9th Berlin Beamforming Conference. Berlin: Springer, 2022: 1-11.

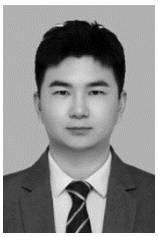
[22] 杨洋, 褚志刚. 高性能波束成形声源识别方法研究综述[J]. 机械工程学报, 2021, 57(24): 166-183.
YANG Y, CHU Z G. A review of high-performance beamforming methods for acoustic source identification[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2021, 57(24): 166-183.

[23] LANCZOS C. An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators[J]. Journal of Research of the National Bureau of Standards, 1950, 45(4): 255.

[24] HU D Y, DING J J, ZHAO H, et al. Spatial basis interpretation for implementing the acoustic imaging of non-synchronous measurements[J]. Applied Acoustics, 2021, 182: 108198.

[作者简介]

韦娟（1973– ），女，陕西渭南人，博士，西安电子科技大学教授，主要研究方向为声音信号处理、移动通信网络、人工智能等。



冯鹏（1999– ），男，甘肃武威人，西安电子科技大学硕士生，主要研究方向为信号处理、声源定位等。

宁方立（1974– ），男，山东泗水人，博士，西北工业大学教授，主要研究方向为振动噪声控制、智能感知机器人、噪声源定位与识别等。